Ueber

die metrischen Eigenschaften kollinearer Gebilde.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde

vorgelegt der

Hohen philosophischen Fakultät

(Mathematisch-naturwissenschaftliche Sektion)

der

Universität Zürich

von

Marcel Grossmann

aus Höngg, Zürich.

*Begutachtet von den Herren Prof. Dr. **Fiedler**, Prof. Dr. **Weiler**.*

Frauenfeld.

Huber & Co. Buchdruckerei.

1902

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41507217_0083

Ueber

die metrischen Eigenschaften kollinearer Gebilde.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde

vorgelegt der

Hohen philosophischen Fakultät

(Mathematisch-naturwissenschaftliche Sektion)

der

Universität Zürich

von

Marcel Grossmann

aus Höngg, Zürich.

ACAD. LIBRARY ZÜRICH

*Begutachtet von den Herren Prof. Dr. **Fiedler**, Prof. Dr. **Weiler**.*

Frauenfeld.

Huber & Co. Buchdruckerei.

1902

§ 1.

Einleitung.

Die metrischen Eigenschaften kollinearer Gebilde wurden zuerst von Henry J. St. Smith in einer Abhandlung „On the focal properties of homographic figures“ untersucht.[1] Die Resultate dieser Untersuchungen finden sich auszugsweise in den Lehrbüchern der Geometrie der Lage der Herren W. Fiedler und Th. Reye und sind zudem von Herrn Reye in größerem Umfange in den Math. Annalen, Bd. 46 (1895), zur Darstellung gebracht worden.

Das Ziel der nachstehenden Untersuchungen soll nun sein, die fokalen oder metrischen Eigenschaften kollinearer Ebenen und Bündel unter besonderer Betonung der *Dualität* darzustellen, ferner den Begriff der *Charakteristik* der ebenen centrischen Kollineation auszudehnen auf *beliebige* kollineare Ebenen und Bündel und hierauf, zwei kollineare Räume vorausgesetzt, diese Charakteristik in Funktion der Koordinaten der kollinearen Ebenen und der Scheitel der kollinearen Bündel zu setzen.

Herrn Prof. Dr. W. Fiedler, meinem verehrten Lehrer, der mir während der Arbeit mannigfache Anregung und Ermunterung zu teil werden ließ, spreche ich auch an dieser Stelle meinen aufrichtigen Dank aus.

Im folgenden sollen nun zuerst die bekannten fokalen Eigenschaften kollinearer Ebenen und Bündel kurz wiederholt werden, einerseits um die nötigen Bezeichnungen einzuführen, anderseits um die Dualität der Resultate, die bei Smith so gut wie ganz fehlt, in gehörige Beleuchtung zu setzen.

§ 2.

Die perspektivische Lage kollinearer Bündel.

Zwei kollineare Bündel G, G' befinden sich in *perspektivischer* Lage, wenn sie Scheine ein und derselben Ebene aus zwei Punkten sind, die der Ebene nicht angehören.

[1] Proceedings of the London Mathem. Society, vol. II (1869); abgedruckt in Smith's Collected Math. Papers, vol. I (Oxford, 1894, 2 vls.).

Zwei kollineare Bündel werden somit perspektivisch, wenn 4 Paare entsprechender Strahlen sich auf *einer* Ebene treffen. In dieser Ebene, der *Perspektivebene* der beiden Bündel, treffen sich dann *alle* Paare entsprechender Strahlen. Legt man durch die Scheitel G, G' der beiden Bündel die Normalebene N zur Perspektivebene (vgl. Fig. 1), so möge die Schnittlinie beider mit n bezeichnet werden. Durch den perspektivischen Zusammenhang der beiden Bündel entstehen in der Ebene N projektivische Büschel in perspektivischer Lage, deren Perspektivaxe n ist. Diese beiden perspektivischen Strahlbüschel haben ein entsprechendes Rechtwinkelpaar, $q\ r$ und $q'\ r'$. Dem Strahl p parallel zur Perspektivebene oder senkrecht zu N entspricht im Bündel G' der gleichgerichtete Strahl p'. Bezeichnet man die Verbindungsebenen von $q\ r$, $r\ p$ und $p\ q$ bezw. mit P, Q, R, so bilden (p, q, r) oder (P, Q, R) ein orthogonales Tripel, dem das orthogonale Tripel (p', q', r') oder (P', Q', R') entspricht.

Jede Ebene durch den sich selbst entsprechenden Strahl G, G' oder $f_1\ f_1'$ der beiden Bündel entspricht sich selbst. Die entsprechenden Ebenenbüschel, deren Scheitelkanten f_1 bezw. f_1' sind, sind demnach kongruent und befinden sich hier zudem in Deckung. Außer f_1, f_1' gibt es aber in den Ebenen P, P' noch ein anderes Paar entsprechender Strahlen, es möge mit f_2, f_2' bezeichnet werden, welche Scheitelkanten entsprechender, gleicher Ebenenbüschel sind. Konstruiert man die symmetrischen Punkte G^*, $G^{*'}$ zu G bezw. G' in Bezug auf die Perspektivaxe n, so schneiden sich $G\ G^{*'}$ und $G'\ G^*$ auf n und sind die erwähnten Strahlen f_2 und f_2'. Die Fig. 1 zeigt, daß f_2 symmetrisch ist zu f_1 bezüglich r, und f_2' symmetrisch zu f_1' bezüglich q'. $f_1\ f_2$ und $f_1'\ f_2'$ heißen die *Fokalstrahlen* der beiden kollinearen Bündel.

Die Ebenen C_1, C_1' durch G bezw. G' parallel zur Perspektivebene sind entsprechende Ebenen, weil sie die unendlich ferne Gerade der Perspektivebene gemeinsam haben. Die projektivischen Strahlbüschel in ihnen sind kongruent. Außer C_1, C_1' gibt es aber durch die Tripelkanten p, p' noch ein zweites Paar von Ebenen, es möge mit C_2, C_2' bezeichnet werden, welche Träger gleicher entsprechender Strahlbüschel sind. Ist M der Punkt auf n, der von G, G' gleich weit entfernt ist, so entspricht der Ebene durch M und p die Ebene durch M und p'. Diese Ebenen sind das zweite Paar von Trägern gleicher entsprechender Strahlbüschel. C_1, C_2 und C_1', C_2' heißen die *cyklischen Ebenen* der beiden kollinearen Bündel.

Es gibt also in zwei kollinearen Bündeln G, G' zwei entsprechende Rechtwinkeltripel $(p\ q\ r)$ und $(p'\ q'\ r')$. Die cyklischen Ebenen gehen durch die Tripelkanten p bezw. p' und sind symmetrisch zu den anstoßenden Tripelebenen Q, R bezw. Q', R'. Die Fokalstrahlen liegen in der dritten Tripelebene P bezw. P' und sind symmetrisch zu den Tripelkanten q, r bezw. q', r'.

§ 3.

Die perspektivische Lage kollinearer Ebenen.

Zwei kollineare Ebenen $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$ befinden sich in *perspektivischer* (oder centrischer) Lage, wenn sie Schnitte ein und desselben Bündels mit Ebenen sind, die dem Bündel nicht angehören.

Zwei kollineare Ebenen werden somit perspektivisch, wenn 4 Paare entsprechender Punkte auf Strahlen durch *einen* Punkt liegen. Durch diesen Punkt, das *Perspektivcentrum* der kollinearen Ebenen, gehen dann die Verbindungslinien *aller* Paare von entsprechenden Punkten. Legt man durch das Perspektivcentrum die Ebene $\mathfrak{N}$ senkrecht zur Schnittlinie von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$ (vgl. Fig. 2), so möge ihr Schnittpunkt mit dieser Schnittlinie mit N bezeichnet werden. Durch den perspektivischen Zusammenhang der beiden Ebenen entstehen in der Ebene $\mathfrak{N}$ zwei projektivische Punktereihen in perspektivischer Lage. Denn der Punkt N entspricht sich selbst. Diese beiden perspektivischen Punktereihen haben je ein Paar ausgezeichneter Punkte, nämlich die unendlich fernen Punkte Q_∞ und R_∞' und die ihnen entsprechenden Gegenpunkte Q' und R. Nennt man p, p' die Träger jener perspektivischen Punktereihen in $\mathfrak{N}$, so entspricht der Richtung P_∞ senkrecht zu p die Richtung P_∞' senkrecht zu p'. Die Punkte (P_∞, Q_∞, R) und deren Verbindungslinien (r_∞, p, q) bilden ein „rechtwinkliges" Tripel, dem das „rechtwinklige" Tripel der Punkte (P_∞', Q', R_∞') und ihrer Verbindungslinien (r', p', q_∞') entspricht.

Jeder Punkt auf der sich selbst entsprechenden geraden Linie $\mathfrak{G}\,\mathfrak{G}'$ oder $c_1\,c_1'$ entspricht sich selbst. Die entsprechenden Punktereihen $c_1\,c_1'$ sind also kongruent und hier zudem in Deckung. Außer $c_1\,c_1'$ gibt es aber durch die Tripelecken P_∞ bezw. P_∞' noch ein anderes Paar entsprechender Strahlen, es möge $c_2\,c_2'$ heißen, welche Träger gleicher, entsprechender Punktereihen sind. Konstruiert man die Ebene $\mathfrak{M}$ durch das Perspektivcentrum C senkrecht zu $\mathfrak{N}$ so, daß sie $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ in geraden Linien trifft, die vom Perspektivcentrum gleich weit entfernt sind, so sind dies offenbar die gesuchten Linien $c_2\,c_2'$. $c_1\,c_2$ und $c_1'\,c_2'$ heißen die *cyklischen Linien* der beiden kollinearen Ebenen.

Die entsprechenden Punkte F_1, F_1' der geraden Linien p, p', die gleich weit von $\mathfrak{N}$ entfernt sind, sind Scheitel entsprechender, gleicher Strahlbüschel. Man erhält zwei weitere Punkte F_2, F_2' mit der gleichen Eigenschaft, wenn man in p zu F_1 den symmetrischen Punkt F_2 bezüglich R, und zu F_1' den symmetrischen Punkt F_2' bezüglich Q' markiert. $F_1\,F_2$ und $F_1'\,F_2'$ heißen die *Fokalpunkte* der beiden kollinearen Ebenen.

Es gibt also in zwei kollinearen Ebenen zwei entsprechende „rechtwinklige“ Punktetripel (P_∞, Q_∞, R) und $(P_\infty', Q', R_\infty')$. Die cyklischen Linien c_1 c_2 und c_1' c_2' gehen durch die Tripelecken P_∞, P_∞' und liegen symmetrisch zu den anstoßenden Tripelkanten $q\ r_\infty$ bezw. $q_\infty'\ r'$. Die Fokalpunkte F_1 F_2 und F_1' F_2' liegen in den dritten Trippelseiten p bezw. p' und symmetrisch zu den Tripelecken Q_∞ R und Q' R_∞'.

§ 4.

Definition der Charakteristik kollinearer Gebilde zweiter Stufe.

Wenn man das eine Bündel parallel sich selbst verschiebt, bis die Scheitel G, G' beider Bündel sich decken, so erhält man die *perspektivisch-incidente* Lage der Bündel, mit der Eigenschaft, daß ein Paar Fokalstrahlen, etwa f_1 f_1', zusammenfallen. Es decken sich dann auch ein Paar cyklischer Ebenen, $\mathfrak{C}_1$ $\mathfrak{C}_1'$.

Dreht man die eine Ebene um die Schnittlinie von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$, bis beide Ebenen zusammenfallen, so befinden sich die beiden kollinearen Ebenen in perspektivisch-incidenter Lage. Dabei fallen zwei Fokalpunkte F_1, F_1' zusammen, und ebenso decken sich zwei cyklische Linien.

Ein Strahl a durch den gemeinsamen Fokalpunkt F_1 F_1' der beiden kollinearen Ebenen in perspektivisch-incidenter Lage entspricht sich selbst, $a = a'$. Die Reihen entsprechender Punkte in ihm sind projektivisch, mit F_1 F_1' und C_1^a $C_1^{a'}$ als Doppelpunkten (vgl. Fig. 2). C_1^a ist der Schnittpunkt von c_1 und a. Nun ist in zwei projektivistischen Reihen das Doppelverhältnis der Doppelpunkte und eines Paares entsprechender Punkte konstant von Paar zu Paar. Dies Doppelverhältnis erweist sich aber auch gegenüber Drehungen von a um F_1 F_1' als absolut invariant. Der Wert Δ dieses Doppelverhältnisses, das mit der bekannten Charakteristik der centrischen Kollineation übereinstimmt, werde auch hier als die *Charakteristik* Δ der beiden kollinearen Ebenen bezeichnet.

(1) $$\Delta = (F_1\ C_1^a\ B\ B')$$

Am einfachsten stellt sich der Wert dieses Doppelverhältnisses dar, wenn man a mit der Tripelkante p zusammenfallen läßt. Die Beachtung der Bezeichnungen in Fig. 2 zeigt, daß

$$\Delta = (F_1\ C_1\ C_2\ C_2') = \frac{F_1\ C_2}{C_1\ C_2} : \frac{F_1'\ C_2'}{C_1'\ C_2'}$$

ist. Da aber $-F_1\ C_2 = F_1'\ C_2'$ ist, so wird

$$\Delta = -\frac{C_1' C_2'}{C_1 C_2} \tag{2}$$

Ferner ist

$$\Delta = (F_1 C_1 F_2 F_2') = \frac{F_1 F_2}{C_1 F_2} : \frac{F_1' F_2'}{C_1' F_2'}$$

und weil $-C_1 F_2 = C_1' F_2'$ ist,

$$\Delta = \frac{-F_1 F_2}{F_1' F_2'} \tag{3}$$

Das Doppelverhältnis Δ reduziert sich auch noch auf ein einfaches Verhältnis, wenn man in der Definitionsgleichung (1) für B den Gegenpunkt R setzt. Dann wird

$$\Delta = (F_1 C_1 R R_\infty') = \frac{F_1 R}{C_1 R} = \frac{-F_1 R}{F_1' Q'} \tag{4}$$

Da in der Ebene Gerade und Punkt duale Gebilde sind, so kann man die nämliche Zahl Δ noch durch die zur vorigen duale Betrachtung erhalten.

Ein Punkt A auf der gemeinsamen cyklischen Linie $c_1\, c_1'$ der beiden kollinearen Ebenen entspricht sich selbst, $A = A'$. Die Strahlbüschel entsprechender Strahlen um ihn sind projektivisch, mit $f_1{}^A\ f_1'{}^{A'}$ und $c_1\, c_1'$ als Doppelstrahlen, wenn unter $f_1{}^A$ die Verbindungslinie von F_1 mit A verstanden wird. Das Doppelverhältnis der Doppelstrahlen mit einem Paar ist konstant von Paar zu Paar, erweist sich aber auch als absolut invariant gegenüber Verschiebungen von A auf $c_1\, c_1'$. Aus der Perspektivität dieser Strahlbüschel mit den vorhin betrachteten Punktreihen folgt die Gleichheit der beiden Doppelverhältnisse

$$\Delta = (F_1 C_1{}^{\text{auf } a} B B') = (f_1{}^{\text{um } A} c_1 b b') \tag{5}$$

Eine Ebene A, welche durch die vereinigten Fokalstrahlen $f_1\, f_1'$ der perspektivisch-incidenten kollinearen Bündel geht, entspricht sich selbst, und die Büschel entsprechender Strahlen in ihr sind projektivisch. Die Doppelstrahlen sind $f_1\, f_1'$ und $c_1{}^{\mathsf{A}}$, $c_1'{}^{\mathsf{A}'}$, wenn $c_1{}^{\mathsf{A}}$ die Schnittlinie von C_1 mit A ist. Das Doppelverhältnis der Doppelstrahlen mit einem Paar ist konstant, erweist sich aber auch als absolut invariant gegenüber Drehungen von A um $f_1\, f_1'$. Man kann daher die *Charakteristik d* kollinearer Bündel definieren als

$$d = (f_1 c_1{}^{\mathsf{A}} b b') \tag{6}$$

Fällt A mit der Tripelebene P zusammen, so ist (vgl. Fig. 1)

$$d = (f_1 c_1 c_2 c_2') = \frac{\sin f_1 c_2}{\sin c_1 c_2} : \frac{\sin f_1' c_2'}{\sin c_1' c_2'}$$

Weil aber $-\angle f_1 c_2 = \angle f_1' c_2'$ ist, so wird

$$d = -\frac{\sin c_1' c_2'}{\sin c_1 c_2} \tag{7}$$

Ebenso ist

$$d = (f_1 c_1 f_2 f_2') = \frac{\sin f_1 f_2}{\sin c_1 f_2} : \frac{\sin f_1' f_2'}{\sin c_1' f_2'}$$

und da $-\angle c_1 f_2 = \angle c_1' f_2'$, so wird

$$d = -\frac{\sin f_1 f_2}{\sin f_1' f_2'} \tag{8}$$

Weil im Bündel Ebene und Strahl duale Elemente sind, so ergibt sich auch für die Charakteristik d eine zweite, zur ersten duale Definition, nämlich

$$d = (f_1 \overset{\text{in A}}{c_1^{\mathsf{A}}} b b') = (\mathrm{F}_1^{\overset{\text{um } a}{a}} \mathrm{C}_1 \mathrm{B} \mathrm{B}') \tag{9}$$

§ 5.

Kanonische Darstellungen für die Kollineation in den Elementargebilden zweiter und dritter Stufe.

J. H. St. Smith gab in der zitierten Abhandlung vom Jahre 1869 kanonische Darstellungen für den analytischen Zusammenhang *kollinearer Ebenen* und *kollinearer Räume*. Dagegen fehlt an jener Stelle sowohl, als auch in der Darstellung des Herrn Reye in den Math. Annalen, Bd. 46, die entsprechende einfache Darstellung des analytischen Zusammenhanges *kollinearer Bündel*. Wie aus den §§ 2—4 dieser Darstellung zur Genüge erhellt, besteht zwischen den Konfigurationen der metrischen Hauptelemente kollinearer Ebenen und kollinearer Bündel Dualität. Es muß daher möglich sein, für den analytischen Zusammenhang zweier kollinearer Bündel eine Darstellung zu geben, welche den Smith'schen Formeln dual gegenübersteht.

Identifiziert man in der Originalebene die drei Ecken

$$A_1 \quad A_2 \quad A_3$$

des Fundamentaldreiecks der Koordinatenbestimmung bezw. mit den Punkten

$$R \quad Q_\infty \quad P_\infty$$

so wird R zum Nullpunkt, p zur x-Axe und q zur y-Axe eines cartesischen Koordinatensystems. In der Bildebene sei die Ecke Q' des Tripels der Nullpunkt, die Tripelkanten r' und p' bezw. x'-Axe und y'-Axe des rechtwinkligen Koordinatensystems.

Infolge dieser Festsetzungen reduzieren sich die allgemeinen linearen Substitutionen, welche die Koordinaten entsprechender Punkte beider Ebenen verbinden,

$$x_i' = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}\, x_k \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{10}$$

auf die einfacheren

$$x' = \frac{a_{23}\, y}{a_{12}\, x}\,; \quad y' = \frac{a_{31}}{a_{12}\, x}$$

Führen wir noch die Längen

$$F_1\, R \qquad b\,; \qquad F_1'\, Q' \qquad b' \tag{11}$$

ein, so müssen sich (vgl. die Fig. 4 und 3) die Punkte H_1 ($x = b'$, $y = b'$) und H_1' ($x' = b$, $y' = b$) entsprechen, woraus folgt, daß

$$\frac{a_{23}}{a_{12}} = b\,; \qquad \frac{a_{31}}{a_{12}} = b\, b'$$

wird. Also lauten die kanonischen Formen für die Zusammenhangsformeln kollinearer Ebenen

$$x\, x' = b\, y\,; \quad x\, y' = b\, b'\,; \quad y\, x' = b'\, x' \tag{12}$$

Bezeichnen (ξ, η) und (ξ', η') die Koordinaten entsprechender Geraden in den beiden kollinearen Ebenen und setzt man voraus, unsere beiden Koordinatensysteme entsprächen dem Begriffe der *verbundenen* Cartesisch-Plücker'schen Koordinatensysteme, so entspricht der Geraden

$$\xi\, x + \eta\, y + 1 = 0$$

nach den Formeln (12) die Gerade

$$\xi \begin{matrix} b\, b' \\ y' \end{matrix} + \eta \begin{matrix} b'\, x' \\ y' \end{matrix} + 1 = 0.$$

Also ist

$$\xi' = \frac{\eta}{b\, \xi}\,; \quad \eta' = \frac{1}{b\, b'\, \xi}$$

oder

$$\xi\, \xi' = \frac{1}{b} \cdot \eta\,; \quad \xi\, \eta' = \frac{1}{b\, b'}\,; \quad \eta\, \eta' = \frac{1}{b'} \cdot \xi' \tag{13}$$

Der Dualität entsprechend, welche zwischen Ebene und Bündel besteht, werden wir im Bündel drei Strahlen a_1, a_2, a_3 der Koordinatenbestimmung zu Grunde legen als Fundamentaltripel. Wählt man noch einen Einheitsstrahl e und eine Einheitsebene E, so kann man die Koordinaten eines Strahles p und einer Ebene II des Bündels in ganz dualer Weise definieren, wie die Koordinaten eines Punktes P und eines Strahles π der Ebene.

Es seien nun im Original

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3$$

bezw. identisch mit den Tripelkanten

$$r, \quad q, \quad p$$

des Bündels; es sind dann in diesem rechtwinkligen Koordinatensystem die Kante r der Nullstrahl und die Tripelebenen P und Q die X- bezw. Y-Ebene. Im entsprechenden Bündel sei q' der Nullstrahl, R' und P' seien bezw. identisch mit der X'- und Y'-Ebene. Liegen zwei solche Koordinatensysteme zu Grunde, so wird sich die allgemeine lineare homogene Substitution

$$X_i' = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik} X_k, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

welche zwischen den Koordinaten entsprechender Punkte besteht, reduzieren auf

$$X' = \begin{matrix} \alpha_{23} & Y \\ \alpha_{13} & X \end{matrix} : \quad Y' = \begin{matrix} \alpha_{31} \\ \alpha_{13} \end{matrix} \begin{matrix} \\ X \end{matrix}$$

In der Ebene P befindet sich der Fokalstrahl f_1. Der Ebene F_1 durch f_1 und die Tripelkante p entspricht die Ebene F_1' durch f_1' und p'. Der Halbierungsebene von P und Q durch r entspricht die Halbierungsebene von P' und Q' durch r'; schneidet jene F_1 in h_1, so schneidet diese F_1' in h_1'. Weil der Strahl h_1 in der Halbierungsebene der Koordinatenebenen liegt, so sind seine beiden Koordinaten gleich. Das Gleiche gilt für den Strahl h_1'. (Vgl. Fig. 5 und 6). Setzt man noch

$$\text{tg}\,(f_1, r) = \beta; \quad \text{tg}\,(f_1', q') = \beta' \tag{14}$$

so hat h_1 die Koordinaten

$$X = \beta; \quad Y = \beta$$

und h_1' die Koordinaten

$$X' = \beta'; \quad Y' = \beta'.$$

Daher ist

$$\begin{matrix} \alpha_{23} \\ \alpha_{13} \end{matrix} \beta : \begin{matrix} \alpha_{31} \\ \alpha_{13} \end{matrix} \beta' \beta$$

und also

$$X' = \beta \frac{Y}{X}; \quad Y' = \beta \beta' \cdot \frac{1}{X}$$

Man findet also für zwei kollineare Bündel die zu den Formeln (12) dualen Formeln

(15) $$X X' = \beta Y; \quad X Y' = \beta \beta'; \quad Y Y' = \beta' X'$$

Auch hier folgen die Formeln für das Entsprechen zweier Ebenen aus der Incidenzbedingung. Der Ebene

$$\Xi X + \mathrm{H} Y + 1 = 0$$

entspricht nach (15) die Ebene

$$\Xi \frac{\beta \beta'}{Y'} + \mathrm{H} \frac{\beta' X'}{Y'} + 1 = 0,$$

so daß

$$\Xi' = \frac{\mathrm{H}}{\beta \Xi}, \quad \mathrm{H}' = \frac{1}{\beta \beta' \Xi}$$

wird, oder, symmetrischer

(16) $$\Xi \Xi' = \frac{1}{\beta} \mathrm{H}; \quad \Xi \mathrm{H}' = \frac{1}{\beta \beta'}; \quad \mathrm{H} \mathrm{H}' = \frac{1}{\beta'} \Xi'$$

Die Formeln (16) entsprechen den Formeln (13) gemäß dem Dualitätsprinzip.

Durch Benützung der Formeln (12) und (13) erhält man nun mit Leichtigkeit die Smith'schen kanonischen Formeln für den kollinearen Zusammenhang zweier Räume, während die Formeln (15) und (16) eine zur eben genannten Darstellung duale, zweite Gruppe von Formeln liefern.

Bezeichnet man die *Gegenebenen* der beiden kollinearen Räume mit R und Q', so existiert in R ein Punkt Q, welcher die im Endlichen liegende Ecke des rektangulären Tripels $S_\infty\ Q\ P_\infty$ ist, dem in der unendlich fernen Ebene R_∞' ein rektanguläres Tripel $S_\infty'\ Q_\infty'\ P_\infty'$ entspricht. Q ist der sogenannte *Mittelpunkt* des Originalraumes; durch ihn geht, senkrecht zur Gegenebene R, die *Axe* $Q\ R_\infty$ dieses Raumes. Dieser Axe entspricht die Axe $Q_\infty'\ R'$ des Bildraumes, welche im Mittelpunkt R' desselben zur Gegenebene Q' senkrecht steht. Wählt man die Gegenebenen R bezw. Q' zu den Ebenen $z = 0$ bezw. $z' = 0$ der räumlichen Koordinatenbestimmung, ferner die Tripelkanten $Q\ P_\infty$ und $Q\ S_\infty$ zu x- bezw. y-Axen rechtwinkliger Koordinaten und schließlich $R'\ P_\infty'$ und $R'\ S_\infty'$ zu x'- bezw. y'-Axen im Bildraum, so entspricht der $x\,z$-Ebene die $x'\,z'$-Ebene und der $y\,z$-Ebene die $y'\,z'$-Ebene. Also werden, nach den Gleichungen (12) zwischen den Koordinaten $x\ y\ z$ und $x'\ y'\ z'$ zweier entsprechender Punkte beider Räume die Gleichungen bestehen

$$x' = b_1' \frac{x}{z}, \qquad z' = b_1 b_1' \frac{1}{z}$$

$$y' = b_2' \frac{y}{z}, \qquad z' = b_2 b_2' \frac{1}{z}$$

wobei (17) $$b_1 b_1' = b_2 b_2'.$$

In symmetrischer Anordnung lauten diese, wie erwähnt schon von Smith angegebenen Zusammenhangsformeln

(18)
$$\begin{cases} x z' = b_1 x' & x' z = b_1' x \\ y z' = b_2 y' & y' z = b_2' y \\ z z' = b_1 b_1' & z' z = b_2' b_2 \end{cases}$$

Aus der Incidenzbedingung für verbundene Punkt-Ebenenkoordinaten folgt hieraus für das Entsprechen zweier Ebenen

(19)
$$\begin{cases} \xi \zeta' = \frac{1}{b_1} \xi' & \xi' \zeta = \frac{1}{b_1'} \xi \\ \eta \zeta' = \frac{1}{b_2} \eta' & \eta' \zeta = \frac{1}{b_2'} \eta \\ \zeta \zeta' = \frac{1}{b_1 b_1'} & \zeta' \zeta = \frac{1}{b_2' b_2} \end{cases}$$

In den Formeln (18) und (19) bezeichnen b_1, b_1' und b_2, b_2' die charakteristischen Konstanten für die Kollineationen in den Ebenen $x\ z$ oder S, bezw. $y\ z$ oder P. Bezeichnet man im Sinne der Definitionsgleichungen (14) die charakteristischen Konstanten der kollinearen Bündel S_∞, S_∞' mit β_1, β_1' und die charakteristischen Konstanten der Bündel P_∞, P_∞' mit β_2, β_2', so erhält man für das Entsprechen der Ebenen ξ, η, ζ und ξ', η', ζ' der beiden kollinearen Räume die Bedingungen

(20)
$$\begin{cases} \xi \zeta' = \beta_1 \xi' & \xi' \zeta = \beta_1' \xi \\ \eta \zeta' = \beta_1 \eta' & \eta' \zeta = \beta_2' \eta \\ \zeta \zeta' = \beta_1 \beta_1' & \zeta' \zeta = \beta_2' \beta_2 \end{cases}$$

wobei $$\beta_1 \beta_1' = \beta_2 \beta_2'$$

Analog folgt für entsprechende Punkte

(21)
$$\begin{cases} x z' = \frac{1}{\beta_1} x' & x' z = \frac{1}{\beta_1'} x \\ y z' = \frac{1}{\beta_2} y' & y' z = \frac{1}{\beta_2'} y \\ z z' = \frac{1}{\beta_1 \beta_1'} & z' z = \frac{1}{\beta_2' \beta_2} \end{cases}$$

Wegen der Perspektivität der zur Verwendung gelangten Koordinatensysteme haben die Buchstaben x, y, z, x', y', z' in den Formeln (18) und (21) und die Buchstaben ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' in den Formeln (19) und (20) dieselbe Bedeutung. Daraus folgt noch, daß

(22) $$b_i = \frac{1}{\beta_i}, \qquad b_i' = \frac{1}{\beta_i'} \quad \text{ist.}$$

§ 6.

Die metrischen Hauptelemente kollinearer Bündel in allgemeiner Lage.[1]

Die cyklischen Ebenen zweier kollinearer Bündel sind die Träger gleicher, entsprechender Strahlbüschel. Um das Kennzeichen solcher Strahlbüschel zu finden, beachte man (bei vereinigter Lage ihrer Träger und ihrer Scheitel) die Doppelstrahlen derselben. Die Pascallinie des Sechsecks auf dem Hülfskreis wird bei gleichwinkligen Büscheln unendlich fern; sie schneidet also aus dem Hülfskreis die beiden imaginären Kreispunkte heraus. Bei kongruenten Strahlbüscheln entsprechen sich also die absoluten Richtungen. — Das gleiche Resultat liefert die folgende direkte Ueberlegung. Das Winkelmaß der beiden Strahlen a, b ist bekanntlich

$$\angle (a\ b) = \mathrm{k\,lg}\,(a\ i_1\ b\ i_2),$$

wenn i_1 und i_2 die absoluten Richtungen des Scheitels sind. Sind zwei projektivische Strahlbüschel gegeben, so ist

$$(a\ b\ c\ x) \wedge (a'\ b'\ c'\ x').$$

Sind diese beiden projektivischen Strahlbüschel insbesondere *gleichwinklig*, so ist

$$\angle (a\ b) = \mathrm{k\,lg}\,(a\ i_1\ b\ i_2) \quad \angle (a'\ b') = \mathrm{k\,lg}\,(a'\ i_1^{*\prime}\ b'\ i_2^{*\prime})$$
$$\angle (a\ c) = \mathrm{k\,lg}\,(a\ i_1\ c\ i_2) = \angle (a'\ c') = \mathrm{k\,lg}\,(a'\ i_1^{*\prime}\ c'\ i_2^{*\prime})$$

woraus folgt, daß

$$(a\ i_1\ b\ i_2) = (a'\ i_1^{*\prime}\ b'\ i_2^{*\prime})$$
$$(a\ i_1\ c\ i_2) = (a'\ i_1^{*\prime}\ c'\ i_2^{*\prime}) \quad \text{ist.}$$

Also muß

$$(a\ i_1\ b\ c) \wedge (a'\ i_1^{*\prime}\ b'\ c') \quad \text{und}$$
$$(a\ i_2\ b\ c) \wedge (a'\ i_2^{*\prime}\ b'\ c') \quad \text{sein, das heißt}$$

$$i_1^{*\prime} = i_1', \quad i_2^{*\prime} = i_2'.$$

[1] cf. Fiedler, Geometrie der Lage, pag. 481.

Die Fokalstrahlen der beiden kollinearen Bündel sind die Träger gleicher, entsprechender Ebenenbüschel. Zwei projektivische Ebenenbüschel sind aber gleichwinklig, wenn die absoluten Stellungen in ihnen einander entsprechen.

Es sei K der Kegel der absoluten Richtungen des Bündels G, $K^{*\prime}$ der Kegel der absoluten Richtungen des Bündels G'. Die imaginären Kegel, die diesen absoluten Kegeln entsprechen, seien mit K' und K^* bezeichnet. Die beiden imaginären Kegel K und K^* mit G als gemeinsamer Spitze haben ein reelles gemeinsames Tripel. Da K der Direktrixkegel eines *Orthogonalsystems* ist, so bildet das gemeinsame Tripel eine trirektanguläre Ecke. Ebenso haben K' und $K^{*\prime}$ ein gemeinsames Tripel harmonischer Polarstrahlen und Polarebenen, welches auch trirektangulär ist und dem Tripel im Originalbündel entspricht. — Die beiden Kegel K und K^* haben vier gemeinsame Tangentialebenen, welche sich nach der allgemeinen Theorie incidenter Polarsysteme in drei Paaren von Strahlen in den Tripelebenen schneiden. Von diesen drei Strahlenpaaren kann aber hier nur eines reell sein. Dies eine reelle Paar wird in der betreffenden Tripelebene erhalten als das Doppelstrahlenpaar einer Involution, von der die beiden Tripelkanten das Rechtwinkelpaar sind. Diese beiden Strahlen sind die Fokalstrahlen f_1 f_2 des Bündels G. — Außerdem haben die beiden Kegel K und K^* noch vier gemeinsame Kanten; diese liegen in drei Paaren von Ebenen durch die Tripelkanten, von denen aber wieder nur ein Paar reell ist, welches symmetrisch zu den anstoßendenden Tripelebenen liegt. Diese beiden Ebenen sind die cyklischen Ebenen $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ des Bündels G.

Von Wichtigkeit ist die Bemerkung, daß die Kegel K und K^* *eigentliche*, nicht spezialisierte Kegel zweiter Ordnung sind. Das Problem, die Fokalstrahlen und die cyklischen Ebenen zweier kollinearer Bündel zu bestimmen, um hieraus die Charakteristik der beiden Bündel zu ermitteln, kommt also auf das Hauptaxenproblem der Kegel zweiter Ordnung hinaus. Gleichwohl gelingt es, die Charakteristik zweier kollinearer Bündel zu berechnen, wenn die Lage ihrer Scheitel gegeben ist — allerdings nicht in Funktion der *rechtwinkligen* Koordinaten der Scheitel.

§ 7.

Die metrischen Hauptelemente kollinearer Ebenen in allgemeiner Lage.

Wenn in der Ebene der absolute Kegelschnitt der Maßbestimmung nicht degeneriert wäre in zwei imaginäre Punkte, so wären die metrischen Verhältnisse in Bündel und Ebene dualistisch, wie die Rollen, die Bündel und Ebene in der Geometrie

der Lage spielen. Weil aber in der Ebene der absolute Kegelschnitt undualistisch degeneriert, so gelingt es, das eine Paar der metrischen Hauptelemente der kollinearen Ebenen, nämlich die Fokalpunkte, direkt zu bestimmen. Die Konstruktion der beiden Fokalpunkte ist von Smith a. a. O. entdeckt worden; hier soll die Lage derselben aus den Koordinaten ξ_0, η_0, ζ_0 der Ebene $\mathfrak{G}_0$ berechnet werden, um die Charakteristik der kollinearen Ebenen $\mathfrak{G}_0$, $\mathfrak{G}_0'$ nach Formel (3) auszudrücken.

Bezeichnet man die imaginären Kreispunkte der Ebene $\mathfrak{G}_0$ mit J_1, J_2, diejenigen der Ebene $\mathfrak{G}_0'$ mit $J_1^{*\prime}$, $J_2^{*\prime}$, so erhält man nach Smith die Fokalpunkte $F_1^{(0)}$, $F_2^{(0)}$ der Ebene $\mathfrak{G}_0$ als die reellen Schnittpunkte der sechs Seiten des Vierecks $J_1\, J_2\, J_1^*\, J_2^*$.

Dem Kegel der absoluten Richtungen vom Nullpunkte R' des Bildraumes aus, dessen Gleichung

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0$$

ist, entspricht im Originalraum der Cylinder

$$\frac{x^2}{b_1^2} + \frac{y^2}{b_2^2} + 1 = 0$$

Den Kreispunkten $J_1^{*\prime}$, $J_2^{*\prime}$ der Ebene $\mathfrak{G}_0'$

$$\xi_0'\, x' + \eta_0'\, y' + \zeta_0'\, z' + 1 = 0$$

entsprechen daher die Schnittpunkte J_1^*, J_2^* der Geraden

$$\xi_0\, x + \eta_0\, y + 1 = 0$$

mit dem Kegelschnitt

$$\frac{x^2}{b_1^2} + \frac{y^2}{b_2^2} + 1 = 0$$

Man erhält für die Punkte J_1^*, J_2^* die Koordinaten

$$(23) \qquad \begin{cases} x_{1,2}^* = \dfrac{-b_1^2\,\xi_0 \pm i\, b_1\, b_2\, \eta_0 \sqrt{1 + b_1^2\,\xi_0^2 + b_2^2\,\eta_0^2}}{b_1^2\,\xi_0^2 + b_2^2\,\eta_0^2} \\ y_{1,2}^* = \dfrac{-b_2^2\,\eta_0 \mp i\, b_1\, b_2\, \xi_0 \sqrt{1 + b_1^2\,\xi_0^2 + b_2^2\,\eta_0^2}}{b_1^2\,\xi_0^2 + b_2^2\,\eta_0^2} \end{cases}$$

Die Punkte J_1', J_2' haben daher die Koordinaten

$$x_{1,2}' = \frac{-b_1'^2\,\xi_0' \pm i\, b_1'\, b_2'\, \eta_0' \sqrt{1 + b_1'^2\,\xi_0'^2 + b_2'^2\,\eta_0'^2}}{b_1'^2\,\xi_0'^2 + b_2'^2\,\eta_0'^2}$$

$$y_{1,2}' = \frac{-b_2'^2\,\eta_0' \mp i\, b_1'\, b_2'\, \xi_0' \sqrt{1 + b_1'^2\,\xi_0'^2 + b_2'^2\,\eta_0'^2}}{b_1'^2\,\xi_0'^2 + b_2'^2\,\eta_0'^2}$$

Die Koordinaten entsprechender Punkte stehen aber in der Beziehung

$$\begin{matrix} y & b_1' \\ x & b_2' \end{matrix} \cdot \begin{matrix} y' \\ x' \end{matrix},$$

so daß die Richtungen der Kreispunkte J_1, J_2 der Ebene $\mathfrak{G}_0$ gegeben sind durch

$$\begin{matrix} y_{1,2} & b_1' \\ x_{1,2} & b_2' \end{matrix} \cdot \begin{matrix} y_{1,2}^* \\ x_{1,2}^* \end{matrix}.$$

Berücksichtigt man noch die Zusammenhangsformeln (19), so erhält man für diese Richtungen

$$\frac{y_{1,2}}{x_{1,2}} = \frac{-\eta_0\,\zeta_0 \pm i\,\xi_0 \cdot \sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2}}{-\xi_0\,\zeta_0 \mp i\,\eta_0 \cdot \sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2}} \tag{24}$$

Es werde nun zur Abkürzung gesetzt

$$\left\{\begin{array}{l} \Sigma_0^2 = \xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2 \\ \mathrm{T}_0^2 = 1 + b_1^2\,\xi_0^2 + b_2^2\,\eta_0^2 \\ \Phi_0^2 = b_1^2\,\xi_0^2 + b_2^2\,\eta_0^2 \end{array}\right. \tag{25}$$

Dann erhalten die Punkte $F_1^{(o)}$, $F_2^{(o)}$, d. h. die reellen Schnittpunkte der Seiten des Vierecks $J_1\,J_2\,J_1^*\,J_2^*$ die Koordinaten

$$\left\{\begin{array}{l} x_{1,2} = \dfrac{-b_1^2\,\xi_0 \cdot \Sigma_0 \mp b_1\,b_2\,\xi_0\,\zeta_0 \cdot \mathrm{T}_0}{\Sigma_0 \cdot \Phi_0^2} \\ y_{1,2} = \dfrac{-b_2^2\,\eta_0 \cdot \Sigma_0 \mp b_1\,b_2\,\eta_0\,\zeta_0 \cdot \mathrm{T}_0}{\Sigma_0 \cdot \Phi_0^2} \\ z_{1,2} = \dfrac{\pm b_1\,b_2\,(\xi_0^2 + \eta_0^2) \cdot \mathrm{T}_0}{\Sigma_0 \cdot \Phi_0^2} \end{array}\right. \tag{26}$$

Setzt man zur Kontrolle etwa

$$\xi_0 = \infty, \quad \eta_0 = 0, \quad \zeta_0 = 0,$$

das heißt, betrachtet man die yz-Ebene, so resultiert aus (26) für

$$\begin{array}{lllllll} F_1^{(o)}: & x_1 = 0, & y_1 = 0, & z_1 = b_2 \\ F_{2(o)}: & x_2 = 0, & y_2 = 0, & z_2 = -b_2, \end{array}$$

wie es angenommen wurde.

Der Tripelpunkt Q_0 der Ebene $\mathfrak{G}_0$ hält die Mitte zwischen $F_1^{(o)}$ und $F_2^{(o)}$, d. h. er hat die Koordinaten

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-\,b_1^{\,2}\,\xi_0}{b_1^{\,2}\,\xi_0^{\,2} + b_2^{\,2}\,\eta_0^{\,2}} \\ y &= \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-\,b_2^{\,2}\,\eta_0}{b_1^{\,2}\,\xi_0^{\,2} + b_2^{\,2}\,\eta_0^{\,2}} \\ z &= \frac{z_1 + z_2}{2} = 0. \end{aligned}\right.$$

Im Sinne des § 5 ist nun

$$F_1^{(o)}\,Q_0 = b_0, \qquad F_1^{(o)\prime}\,R_0' = b_0'$$

zu setzen. Dann ist

$$(F_1^{(o)}\,F_2^{(o)})^2 = 4\,b_0^{\,2} = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

Es folgt daher mit Benützung der Gleichungen (26)

$$b_0^{\,2} = \frac{b_1^{\,2}\,b_2^{\,2}\cdot \mathrm{T}^2{}_0\cdot(\xi_0^{\,2} + \eta_0^{\,2})}{\Phi_0^{\,4}},$$

so daß

$$\tfrac{1}{2}\,F_1^{(o)}\,F_2^{(o)} : F_1^{(o)}\,Q_0 = b_0 = \frac{b_1\,b_2\cdot \mathrm{T}_0\,(\xi_0^{\,2} + \eta_0^{\,2})^{\frac{1}{2}}}{\Phi_0^{\,2}}$$

wird, oder also

$$(28)\qquad b_0 = \frac{b_1\,b_2\,(1 + b_1^{\,2}\,\xi_0^{\,2} + b_2^{\,2}\,\eta_0^{\,2})^{\frac{1}{2}}\cdot(\xi_0^{\,2} + \eta_0^{\,2})^{\frac{1}{2}}}{(b_1^{\,2}\,\xi_0^{\,2} + b_2^{\,2}\,\eta_0^{\,2})}$$

Für $\xi_0 = \infty$, $\eta_0 = 0$, $\zeta_0 = 0$, folgt, wie zu erwarten ist,

$$b_0 = b_2$$

Sowohl die Lage des Tripelpunktes Q_0, als auch die Größe b_0 ist unabhängig von der Koordinate ζ_0. Daraus folgt:

Die Fokalpunkte aller Ebenen des Raumes ordnen sich in zweifach unendlich vielen Ebenen kreisförmig an. Die Ebenen stehen senkrecht zur Gegenebene des Raumes und die Mittelpunkte der Kreise liegen in der Gegenebene.

Kennt man die Lage der Fokalpunkte $F_1^{(o)\prime}$, $F_2^{(o)\prime}$ der Ebene $\mathfrak{G}_0'$, so findet man daraus leicht die Lage der cyklischen Linien $c_1^{(o)}$, $c_2^{(o)}$ der Ebene $\mathfrak{G}_0$. Die cyklischen Linien stehen ja senkrecht auf der Tripelkante p_0, d. h. auf der Verbindungslinie von $F_1^{(o)}$, $F_2^{(o)}$ und sind von Q_0 um b_0' entfernt. Bezeichnet γ_0 den Winkel der Stellungsgeraden der Ebene $\mathfrak{G}_0$ mit der z-Axe, so ist die Höhe der cyklischen Linien über der Gegenebene, zu der sie parallel sind, gegeben durch

$$z = \pm\, b_0'\,\sin\gamma_0.$$

Da

$$\cos\gamma_0 = \frac{\zeta_0}{\sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2}}$$

$$\sin\gamma_0 \qquad \frac{\sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2}}{\sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2}} \qquad \text{und}$$

$$b_0' = \frac{b_1' b_2' (1 + b_1'^2 \xi_0'^2 + b_2'^2 \eta_0'^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (\xi_0'^2 + \eta_0'^2)^{\frac{1}{2}}}{b_1'^2 \xi_0'^2 + b_2'^2 \eta_0'^2}$$

ist, und ferner

$$(29) \quad \begin{cases} 1 + b_1'^2 \xi_0'^2 + b_2'^2 \eta_0'^2 = \dfrac{\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2}{\zeta_0^2} \\ b_1'^2 \xi_0'^2 + b_2'^2 \eta_0'^2 = \dfrac{\xi_0^2 + \eta_0^2}{\zeta_0^2} \end{cases}$$

so wird nach kurzer Rechnung

$$(30) \quad z = + \frac{(b_1' b_2')^{\frac{1}{2}} (b_1^2 \xi_0^2 + b_2^2 \eta_0^2)^{\frac{1}{2}}}{(b_1 b_2)^{\frac{1}{2}} (\xi_0^2 + \eta_0^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Es wurde dabei von der aus (19) folgenden Gleichung

$$\zeta_0 \zeta_0' = \frac{+1}{\sqrt{b_1 b_1' b_2 b_2'}}$$

Gebrauch gemacht. Setzt man wieder zur Probe $\xi_0 = \infty$, $\eta_0 = 0$, $\zeta_0 = 0$ ein, so wird

$$z = \pm b_2'$$

Nach (30) ist z unabhängig von ζ_0.

Die cyklischen Linien aller Ebenen, welche dieselbe Spur in der Gegenebene haben, liegen in zwei nur von dieser Spur abhängigen, zur Gegenebene parallelen und symmetrischen Ebenen.

§ 8.

Berechnung der Charakteristik der beiden kollinearen Ebenen.

Benützt man die Formeln (29) und die ihnen entsprechenden, so findet man für b_0 und b_0' die einfacheren Werte

$$(31)\qquad \left\{\begin{array}{l} b_0 = \dfrac{b_1\, b_2\, (\xi_0^{\,2} + \eta_{l0}^{\,2})^{\frac{1}{2}}\, (\xi_0'^{\,2} + \eta_{l0}'^{\,2} + \zeta_0'^{\,2})^{\frac{1}{2}} \cdot \zeta_0'}{\xi_0'^{\,2} + \eta_{l0}'^{\,2}} \\ b_0' = \dfrac{b_1'\, b_2'\, (\xi_0'^{\,2} + \eta_{l0}'^{\,2})^{\frac{1}{2}}\, (\xi_0^{\,2} + \eta_{l0}^{\,2} + \zeta_0^{\,2})^{\frac{1}{2}} \cdot \zeta_0'}{\xi_0^{\,2} + \eta_{l0}^{\,2}} \end{array}\right.$$

Die Charakteristik Δ_0 *der beiden kollinearen Ebenen* $\mathfrak{G}_0$, $\mathfrak{G}_0'$ *wird also*

$$\Delta_0 = -\frac{b_0}{b_0'} = -\frac{b_1\, b_2\, (\xi_0^{\,2} + \eta_{l0}^{\,2})^{\frac{3}{2}} \cdot (\xi_0'^{\,2} + \eta_{l0}'^{\,2} + \zeta_0'^{\,2})^{\frac{1}{2}} \cdot \zeta_0'}{b_1'\, b_2'\, (\xi_0'^{\,2} + \eta_{l0}'^{\,2})^{\frac{3}{2}} \cdot (\xi_0^{\,2} + \eta_{l0}^{\,2} + \zeta_0^{\,2})^{\frac{1}{2}} \cdot \zeta_0}$$

Bezeichnet man die Charakteristiken der Ebenen $x\,z$ und $y\,z$ mit Δ_1 bezw. Δ_2, so wird

$$(32)\qquad \Delta_0 = -\Delta_1\, \Delta_2 \cdot \frac{(\xi_0^{\,2} + \eta_{l0}^{\,2})^{\frac{3}{2}} \cdot (\xi_0'^{\,2} + \eta_{l0}'^{\,2} + \zeta_0'^{\,2})^{\frac{1}{2}} \cdot \zeta_0'}{(\xi_0'^{\,2} + \eta_{l0}'^{\,2})^{\frac{3}{2}} \cdot (\xi_0^{\,2} + \eta_{l0}^{\,2} + \zeta_0^{\,2})^{\frac{1}{2}} \cdot \zeta_0}$$

§ 9.

Das Bündelproblem in rechtwinkligen Koordinaten.

Es handelt sich nun um die analytische Bestimmung der metrischen Hauptelemente, insbesondere der Charakteristik zweier kollinearer Bündel, deren Scheitel G_0, G_0' die rechtwinkligen Koordinaten x_0, y_0, z_0, bezw. x_0', y_0', z_0' haben, in Bezug auf das in § 5 festgelegte Koordinatensystem.

Der Kegel K der absoluten Richtungen des Punktes G_0 hat die Gleichung

$$(33)\qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = 0$$

Dem Kegel $K^{*\prime}$ der absoluten Richtungen des Punktes G_0', dessen Gleichung

$$(x' - x_0')^2 + (y' - y_0')^2 + (z' - z_0')^2 = 0$$

ist, entspricht der Kegel K^*, welcher durch

$$(34)\qquad \frac{(x\, z_0 - z\, x_0)^2}{b_1^{\,2}} + \frac{(y\, z_0 - z\, y_0)^2}{b_2^{\,2}} + (z - z_0)^2 = 0$$

dargestellt ist.

Um die metrischen Hauptelemente der Bündel G_0, G_0' zu bestimmen, muß man das gemeinsame Tripel der beiden durch ihre Direktrixgleichungen (33) und (34) vertretenen Polarsysteme, die gemeinsamen Kanten und Tangentialebenen der Kegel

K und K^* und deren Verbindungsebenen und Schnittkanten finden. Das Problem ist also ein kubisches, ohne daß Wurzeln der bezüglichen Gleichungen von vornherein bekannt wären, wie im dualen Problem kollinearer Ebenen.

Man sieht durch Betrachtung des Spezialfalles

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad z_0 \neq 0$$

nun aber ein, daß die analytische Lösung des Problems in rechtwinkligen Koordinaten insofern unmöglich ist (bei *allgemeinen* Werten von x_0, y_0, z_0), als sich die bezüglichen Resultate für *alle* Punkte des Raumes nicht durch *eine* Formelgruppe umspannen lassen. *Alle* Fälle umfaßt nur eine Formel, welche die drei Zweige *einer und derselben algebraischen Funktion* der rechtwinkligen Koordinaten in Betracht zieht.

Setzt man nämlich

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad z_0 \neq 0,$$

so liegen die Scheitel G_0, G_0' auf den Axen der beiden kollinearen Räume. Die Kegelgleichungen (33) und (34) reduzieren sich dann auf

(35) $$x^2 + y^2 + (z - z_0)^2 = 0 \quad \text{und}$$

(36) $$\frac{{z_0}^2 x^2}{{b_1}^2} + \frac{{z_0}^2 y^2}{{b_2}^2} + (z - z_0)^2 = 0$$

Schneidet man diese Kegel mit der Gegenebene $z = 0$, so erhalten die Spurkegelschnitte k und k^* die Gleichungen

(37) $$x^2 + y^2 + {z_0}^2 = 0$$

und

(38) $$\frac{x^2}{{b_1}^2} + \frac{y^2}{{b_2}^2} + 1 = 0$$

Die Gleichung (38) stellt den imaginären Kegelschnitt dar, welcher dem unendlich fernen, imaginären Kugelkreis des Bildraumes entspricht.

Im gegenwärtigen Spezialfalle ist das rechtwinklige Tripel der kollinearen Bündel bekannt. Es wird, im Originalraum, gebildet durch die Koordinatenebenen $x = 0$, $y = 0$ und die Ebene $z = z_0$.

Die vier gemeinsamen Tangenten der Kegelschnitte k, k^* haben als einziges Paar reeller Schnittpunkte die Durchstoßpunkte der Fokalstrahlen $f_1^{(o)}$, $f_2^{(o)}$ mit der Gegenebene. In Linienkoordinaten ausgedrückt, lauten die Gleichungen dieser Kegelschnitte:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \xi \\ 0 & 1 & 0 & \eta \\ 0 & 0 & z_0^2 & 1 \\ \xi & \eta & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

und

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{b_1^2} & 0 & 0 & \xi \\ 0 & \frac{1}{b_2^2} & 0 & \eta \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \xi & \eta & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$z_0^2 \xi^2 + z_0^2 \eta^2 + 1 = 0 \tag{39}$$

$$b_1^2 \xi^2 + b_2^2 \eta^2 + 1 = 0 \tag{40}$$

Man findet daher für die vier gemeinsamen Tangenten der beiden Kegelschnitte:

$$\xi^2 = \frac{z_0^2 - b_2^2}{z_0^2 (b_2^2 - b_1^2)}$$
$$\eta^2 = \frac{z_0^2 - b_1^2}{z_0^2 (b_1^2 - b_2^2)} \tag{41}$$

Ohne der Allgemeinheit der zu Grunde liegenden räumlichen Kollineation Abbruch zu thun, kann festgesetzt werden, daß

$$b_1 > b_2$$

sein soll.

Die Fortführung der Untersuchung erfordert die Unterscheidung der folgenden drei Fälle:

$$\begin{aligned} &\text{I.} && |z_0| > b_1 \\ &\text{II.} && b_1 > |z_0| > b_2 \\ &\text{III.} && b_2 > |z_0 \end{aligned} \tag{42}$$

Weil $z_0 z_0' = b_1 b_1' = b_2 b_2'$ ist, so hat die Festsetzung $b_1 > b_2$ zur Folge

$$b_2' > b_1',$$

und den Fällen (I), (II), (III) entsprechen im Bildraum die Fälle

$$\begin{aligned} &\text{I'.} && b_1' > |z_0'| \\ &\text{II'.} && b_2' > |z_0'| > b_1' \\ &\text{III'.} && |z_0'| > b_2' \end{aligned} \tag{43}$$

Wenn *erstens* angenommen wird, es sei

$$z_0 > b_1,$$

so ergeben die Formeln (41), daß

$$\xi^2 < 0, \quad \eta^2 > 0$$

ist. Die zwei reellen Schnittpunkte der gemeinsamen Tangenten haben also die Koordinaten

$$x = 0, \quad y = \pm z_0 \sqrt{\frac{b_1^2 - b_2^2}{z_0^2 - b_1^2}} \tag{44}$$

In diesem Falle liegen also die Fokalstrahlen in der Tripelebene $x = 0$. Für die beiden Fokalstrahlen, die vom Scheitel G_0 des Bündels nach den Punkten (44) gehen, findet man also nach kurzer Rechnung

$$\tfrac{1}{2} \sin f_1^\circ f_2^\circ = \sqrt{\frac{(b_1^2 - b_2^2)(z_0^2 - b_1^2)}{(z_0^2 - b_2^2)^2}} \qquad (z_0 > b_1) \tag{45}$$

Offenbar ist im entsprechenden Fall I' der Sinus der Fokalstrahlen gegeben durch

$$\tfrac{1}{2} \sin f_1'^\circ f_2'^\circ = \sqrt{\frac{(b_2'^2 - b_1'^2)(b_1'^2 - z_0'^2)}{(b_2'^2 - z_0'^2)^2}} \qquad (b_1' > z_0') \tag{46}$$

Die Fokalstrahlen $f_1'^\circ$, $f_2'^\circ$ sind in der Ebene $x' = 0$ enthalten.

Legt man die Werte (45) und (46) zur Berechnung der Charakteristik zu Grunde, so folgt nach (8)

$$d(0, 0, z_0) = \frac{-b_1^2}{b_2 \cdot |z_0|} \qquad (z_0 > b_1) \tag{47}$$

Bei der Umformung dieses Ausdrucks wurden die in (46) auftretenden Größen nach (18) ersetzt durch die in (45) auftretenden Größen.

Setzt man *zweitens* fest, es sei

$$b_1 > z_0 > b_2,$$

so sagen die Formeln (41) für diesen Fall, daß

$$\xi^2 < 0, \quad \eta^2 < 0 \quad \text{sei.}$$

Die 4 imaginären Tangenten von k und k^* schneiden sich nicht auf den Axen reell, sondern es sind je zwei parallele konjugiert imaginär. Für die Richtungen der beiden reellen Schnittpunkte folgt

$$\frac{y}{x} = -\frac{\xi}{\eta} = \pm \sqrt{\frac{z_0^2 - b_2^2}{b_1^2 - z_0^2}} \tag{48}$$

In diesem Falle liegen also die Fokalstrahlen in der Tripelebene $z = z_0$; dann wird

$$\frac{1}{2} \sin f_1^{\circ} f_2^{\circ} = \sqrt{\frac{(z_0^2 - b_2^2)(b_1^2 - z_0^2)}{(b_1^2 - b_2^2)^2}} \qquad (b_1 > z_0 > b_2) \tag{49}$$

Da dem gegenwärtigen Falle II der Fall II' entspricht, so findet man in gleicher Weise

$$\frac{1}{2} \sin f_1^{\circ\prime} f_2^{\circ\prime} = \sqrt{\frac{(b_2'^2 - z_0'^2)(z_0'^2 - b_1'^2)}{(b_2'^2 - b_1'^2)^2}} \qquad (b_2' > z_0' > b_1') \tag{50}$$

Aus diesen Werten resultiert

$$d(0, 0, z_0) = \frac{-z_0^2}{b_1 b_2} \qquad (b_1 > z_0 > b_2) \tag{51}$$

Drittens ist noch der Fall zu betrachten, daß

$$b_2 > z_0$$

ist. Dann wird

$$\eta^2 < 0, \quad \xi^2 > 0$$

Die zwei reellen von den sechs Schnittpunkten der mehrfach erwähnten vier Tangenten liegen also auf der x-Axe; in diesem Falle befinden sich also die Fokalstrahlen in der Ebene $y = 0$, und ihre Durchstoßpunkte mit der Gegenebene $z = 0$ haben die Koordinaten

$$x = \pm z_0 \sqrt{\frac{(b_1^2 - b_2^2)}{(b_2^2 - z_0^2)}}, \quad y = 0 \tag{52}$$

Es berechnet sich hieraus

$$\frac{1}{2} \sin f_1^{\circ} f_2^{\circ} = \sqrt{\frac{(b_2^2 - z_0^2)(b_1^2 - b_2^2)}{(b_1^2 - z_0^2)^2}} \qquad (b_2 > z_0) \tag{53}$$

und

$$\frac{1}{2} \sin f_1^{\circ\prime} f_2^{c\prime} = \sqrt{\frac{(b_2'^2 - b_1'^2)(z_0'^2 - b_2'^2)}{(b_1'^2 - z_0'^2)^2}} \qquad (z_0' > b_2') \tag{54}$$

Für das Intervall III berechnet sich also die Charakteristik nach der Formel

$$d(0, 0, z_0) = \frac{-b_2^2}{b_1 \cdot |z_0|} \qquad (z_0 < b_2) \tag{55}$$

Diese Resultate ergeben erstens die Richtigkeit der am Anfange dieses Paragraphen ausgesprochenen Behauptung, es ließe sich keine alle Fälle umspannende

Formel für die Charakteristik kollinearer Bündel in rechtwinkligen Koordinaten angeben. Es erhellt dies zur Genüge aus den drei Formeln (47), (51) und (55).

Zweitens kann man sich über die Lage der Fokalstrahlen folgendes anschauliches Bild machen: Bewegt sich der Scheitel des Bündels auf der Axe des Raumes ($x = 0$, $y = 0$) aus dem unendlich fernen Punkt $z = +\infty$ derselben gegen $z = 0$, so breiten sich die Fokalstrahlen in der Ebene $x = 0$ immer mehr aus, bis sie, für $z_0 = b_1$, in der Linie $z = b_1$ zusammenfallen. Setzt der Scheitel seine Bewegung fort, so breiten sich die Fokalstrahlen nun in der *variabeln* horizontalen Ebene $z = z_0$ aus, bis sie, nämlich für $z_0 = b_2$, in der Linie $y = 0$, $z = b_2$, wieder zusammenfallen. Von da an wird die Ebene $y = 0$ zu ihrer Verbindungsebene, in der sie sich bis zum Zusammenfallen mit der z-Axe ausbreiten ($z_0 = 0$). Auf der negativen Seite der z-Axe wiederholt sich der Vorgang in symmetrischer Weise.

Setzt man

$$z_0 = b_1$$

so ergeben, wie es sein muß, *beide* Formeln, (47) und (51), den Wert

$$d\,(0, 0, b_1) = \frac{-b_1}{b_2},$$

und für

$$z_0 = b_2$$

stimmen (51) und (55) im Werte

$$d\,(0, 0, b_2) = \frac{-b_2}{b_1}$$

überein.

Es soll jetzt das Bündelproblem in elliptischen Koordinaten behandelt werden.

Es gelingt nämlich, für die Charakteristik kollinearer Bündel eine *allgemein gültige, höchst einfache Formel in Funktion der elliptischen Koordinaten des Scheitels anzugeben.*

Vorerst mögen die *sich entsprechenden konfokalen Flächen zweiten Grades beider Räume in einer für diese Zwecke geeigneten Form* diskutiert werden. –

§ 10.

Die beiden Systeme entsprechender konfokaler Flächen zweiter Ordnung.

Die Gleichung

$$\frac{x^2}{\lambda^2 - b_1^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b_2^2} + \frac{z^2}{\lambda^2} = 1 \tag{56}$$

stellt, unter λ^2 einen variabeln Parameter verstanden, ein System konfokaler Flächen zweiten Grades dar. Man überzeugt sich leicht, daß diesem System konfokaler Flächen im kollinearen Raume das System konfokaler Flächen zweiten Grades

$$\frac{x'^2}{\lambda'^2 - b_1'^2} + \frac{y'^2}{\lambda'^2 - b_2'^2} + \frac{z'^2}{\lambda'^2} = 1 \tag{57}$$

entspricht, wenn die Parameter λ^2, λ'^2 entsprechender Flächen im Zusammenhang

$$\lambda^2 \lambda'^2 = b_1^2 b_1'^2 = b_2^2 b_2'^2 \tag{58}$$

stehen. Faßt man in Gleichung (56) die rechtwinkligen Koordinaten als *gegeben* auf, so stellt sie eine in λ^2 kubische Gleichung dar, deren drei Wurzeln mit λ_1^2, λ_2^2 und λ_3^2 bezeichnet werden mögen. Bekanntlich sind diese drei Wurzeln so beschaffen, daß, bei passender Bezeichnung,

$$\lambda_1^2 \geqq b_1^2 \geqq \lambda_2^2 \geqq b_2^2 \geqq \lambda_3^2 \geqq 0 \tag{59}$$

wird. Es heißt das, daß durch jeden Punkt x_0, y_0, z_0 des Raumes ein Ellipsoid, ein einfaches und ein zweifaches Hyperboloid gehen. Umgekehrt schneiden sich das Ellipsoid $\lambda_1^2 = \text{Const.}$, das einfache Hyperboloid $\lambda_2^2 = \text{Const.}$ und das zweifache Hyperboloid $\lambda_3^2 = \text{Const.}$ in einem System von 8 Punkten *rechtwinklig*, so daß deren Koordinaten x_0, y, z_0 gegeben sind durch die Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} x_0^2 &= \frac{(\lambda_1^2 - b_1^2)(\lambda_2^2 - b_1^2)(\lambda_3^2 - b_1^2)}{b_1^2 (b_1^2 - b_2^2)} \\ y_0^2 &= \frac{(\lambda_1^2 - b_2^2)(\lambda_2^2 - b_2^2)(\lambda_3^2 - b_2^2)}{b_2^2 (b_2^2 - b_1^2)} \\ z_0^2 &= \frac{\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2}{b_1^2 b_2^2} \end{aligned}\right. \tag{60}$$

Durchläuft der Parameter λ^2 alle Werte von $+\infty$ bis 0, so entsteht das System der konfokalen Flächen zweiten Grades in dieser Folge:

$\lambda^2 = +\infty$: Kugel mit unendlich großem Radius.

$\lambda^2 > b_1^2$: Ellipsoide.

$\lambda^2 = b_1^2$: *Inneres* der Fokalellipse $x = 0$, $\frac{y^2}{b_1^2 - b_2^2} + \frac{z^2}{b_1^2} = 1$.

$\lambda^2 = b_1^2$: *Aeußeres* der Fokalellipse.

$b_1^2 > \lambda^2 > b_2^2$: Einfache Hyperboloide.

$\lambda^2 = b_2^2$: *Aeußeres* der Fokalhyperbel $y = 0$, $\frac{x^2}{b_2^2 - b_1^2} + \frac{z^2}{b_2^2} = 1$.

$\lambda^2 = b_2^2$: *Inneres* der Fokalhyperbel.

$b_2^2 > \lambda^2 > 0$: Zweifache Hyperboloide.

$\lambda^2 = 0$: Ebene $z = 0$. (Vgl. Fig. 7.)

Es ist bekannt, welche Bedeutung die beiden konfokalen Systeme (56) und (57) für die kollinearen Bündel beider Räume haben: Die Normalen der drei durch einen Punkt gehenden Flächen des Systems bilden das rechtwinklige Tripel, dem im andern Raum wieder ein rechtwinkliges Tripel entspricht. Die Erzeugenden des einfachen Hyperboloides, das durch den Punkt geht, sind die Fokalstrahlen dieses Punktes. Diese bekannten Thatsachen sollen nun zur Berechnung der Charakteristik zweier kollinearer Bündel benutzt werden.

§ 11.

Das Bündelproblem in elliptischen Koordinaten.

Es mögen λ_1, λ_2, λ_3 die elliptischen Koordinaten des Punktes x_0, y_0, z_0 bezeichnen. Zwischen diesen 6 Koordinaten bestehen dann die Gleichungen (60).

Am zweckmäßigsten berechnet man die Charakteristik $d\ (x_0,\ y_0,\ z_0)$ mit Benützung der Formel (8)

$$d \quad \begin{matrix} -\sin f_1^\circ f_2^\circ \\ \sin f_1^\circ f_2^\circ \end{matrix}$$

Die Differentialgleichung der geradlinigen Erzeugenden auf dem Hyperboloid $\lambda_2 = \text{Const.}$ ist

$$(61) \qquad \frac{d\lambda_1^2}{\sqrt{(\lambda_1^2 - b_1^2)(\lambda_1^2 - b_2^2)\lambda_1^2}} - \frac{d\lambda_3^2}{\sqrt{(\lambda_3^2 - b_1^2)(\lambda_3^2 - b_2^2)\lambda_3^2}}$$

Man findet diese Differentialgleichung unschwer aus der Differentialgleichung der geodätischen Linien auf dem einfachen Hyperboloid. Die Gleichung (61) definiert die Fortschreitungsrichtungen der geradlinigen Erzeugenden im Punkte (λ_1, λ_3) des einfachen Hyperboloides λ_2.

Der Ausdruck des Linienelementes in elliptischen Koordinaten ist

$$4\,ds^2 = \frac{(\lambda_1^2-\lambda_2^2)(\lambda_1^2-\lambda_3^2)}{(\lambda_1^2-b_1^2)(\lambda_1^2-b_2^2)\lambda_1^2}\cdot(d\lambda_1^2)^2 + \frac{(\lambda_2^2-\lambda_3^2)(\lambda_2^2-\lambda_1^2)}{(\lambda_2^2-b_1^2)(\lambda_2^2-b_2^2)\lambda_2^2}\cdot(d\lambda_2^2)^2 + \frac{(\lambda_3^2-\lambda_1^2)(\lambda_3^2-\lambda_2^2)}{(\lambda_3^2-b_1^2)(\lambda_3^2-b_2^2)\lambda_3^2}\cdot(d\lambda_3^2)^2 \tag{62}$$

Setzt man

$$d\lambda_2^2 = 0, \qquad d\lambda_3^2 = 0,$$

bleibt also auf der orthogonalen Trajektorie der Fläche $\lambda_1^2 = \text{Const.}$, so wird deren Linienelement

$$4\,ds_1^2 = \frac{(\lambda_1^2-\lambda_2^2)(\lambda_1^2-\lambda_3^2)}{(\lambda_1^2-b_1^2)(\lambda_1^2-b_2^2)\lambda_1^2}\cdot(d\lambda_1^2)^2 \tag{63}$$

Für das Linienelement der orthogonalen Trajektorie zum zweifachen Hyperboloid $\lambda_3^2 = \text{Const.}$ ergibt sich

$$4\,ds_3^2 = \frac{(\lambda_3^2-\lambda_1^2)(\lambda_3^2-\lambda_2^2)}{(\lambda_3^2-b_1^2)(\lambda_3^2-b_2^2)\lambda_3^2}\cdot(d\lambda_3^2)^2 \tag{64}$$

Daher ist die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Fokalstrahlen f_1°, f_2° des Punktes (x_0, y_0, z_0) mit der Tripelkante q_0 bilden, gegeben durch

$$\operatorname{tg}^2 f_1^\circ q_0 = \left(\frac{ds_1}{ds_3}\right)^2 = \frac{(\lambda_1^2-\lambda_2^2)(\lambda_1^2-\lambda_3^2)}{(\lambda_3^2-\lambda_1^2)(\lambda_3^2-\lambda_2^2)}\cdot\frac{(\lambda_3^2-b_1^2)(\lambda_3^2-b_2^2)\lambda_3^2}{(\lambda_1^2-b_1^2)(\lambda_1^2-b_2^2)\lambda_1^2}\cdot\left(\frac{d\lambda_1^2}{d\lambda_3^2}\right)^2 \tag{65}$$

Entnimmt man der Differentialgleichung (61) den Wert $\left(\frac{d\lambda_1^2}{d\lambda_3^2}\right)^2$, so folgt

$$\operatorname{tg}^2 f_1^\circ q_0 = -\frac{\lambda_1^2-\lambda_2^2}{\lambda_3^2-\lambda_2^2}, \tag{66}$$

woraus weiter

$$\cos^2 f_1^\circ q_0 = \frac{\lambda_3^2-\lambda_2^2}{\lambda_3^2-\lambda_1^2} \tag{67}$$

und

$$\sin^2 f_1^\circ q_0 = \frac{\lambda_2^2-\lambda_1^2}{\lambda_3^2-\lambda_1^2} \tag{68}$$

Da nun

$$\sin f_1^\circ f_2^\circ = 2 \sin f_1^\circ q_0 \cdot \cos f_1^\circ q_0$$

ist, so erhält man

$$\sin f_1^\circ f_2^\circ = 2 \sqrt{-\frac{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)}{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)^2}} \tag{69}$$

Im kollinearen Bündel, dessen Scheitel der Punkt $(\lambda_1'^2, \lambda_2'^2, \lambda_3'^2)$ ist, findet man

$$\sin f_1'^\circ f_2'^\circ = 2 \sqrt{-\frac{(\lambda_1'^2 - \lambda_2'^2)(\lambda_3'^2 - \lambda_2'^2)}{(\lambda_1'^2 - \lambda_3'^2)^2}} \tag{70}$$

Es wird mithin nach (8)

$$d(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2) = \frac{\lambda_1'^2 - \lambda_3'^2}{\lambda_1^2 - \lambda_3^2} \sqrt{\frac{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)}{(\lambda_1'^2 - \lambda_2'^2)(\lambda_3'^2 - \lambda_2'^2)}} \tag{71}$$

Beachtet man noch, daß

$$\lambda_i^2 \lambda_i'^2 = b_1^2 b_2'^2 = b_2^2 b_2'^2$$

ist, so lassen sich die Koordinaten $\lambda_i'^2$ eliminieren, und man gelangt nach kurzer Umrechnung zu folgendem Resultat:

Die Charakteristik der kollinearen Bündel, deren Scheitel die Koordinaten (λ_i^2) *bezw.* $(\lambda_i'^2)$ *haben, ist*

$$d(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2) \quad -\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1 \lambda_3} \tag{72}$$

Es lassen sich nun leicht die Formeln (47), (51) und (55) des § 9 als Spezialfälle der allgemeinen Formel (72) erkennen.

Macht man nämlich wieder die Voraussetzung, der Scheitel des Originalbündels sei auf der z-Axe gelegen, es sei also $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, so hat man, um die elliptischen Koordinaten des Scheitels angeben zu können, wieder die drei Fälle zu unterscheiden:

I. $|z_0| > b_1$

II. $b_1 > |z_0| > b_2$

III. $b_2 > |z_0|$

Im *ersten* Falle liegt der Scheitel, wie ein Blick auf Fig. 7 zeigt, im *Aeußeren* der *Fokalellipse* und im *Inneren* der *Fokalhyperbel*. Also sind seine elliptischen Koordinaten

$$\lambda_1^2 = z_0^2, \quad \lambda_2^2 = b_1^2, \quad \lambda_3^2 = b_2^2.$$

Nach (72) findet man also für die Charakteristik eines solchen Punktes die Formel (47).

Im *zweiten* Falle befindet sich der Punkt im *Inneren beider Fokalkegelschnitte.* Seine elliptischen Koordinaten sind also

$$\lambda_1^2 = b_1^2, \quad \lambda_2^2 = z_0^2, \quad \lambda_3^2 = b_2^2.$$

Diese Werte liefern, in (72) eingesetzt, die Formel (51).

Wenn endlich *drittens* $b_2 > |z_0|$ ist, so liegt der Scheitel im *Inneren* der *Fokalellipse,* aber im *Aeußeren* der *Fokalhyperbel.* Demnach ist

$$\lambda_1^2 = b_1^2, \quad \lambda_2^2 = b_2^2, \quad \lambda_3^2 = z_0^2,$$

und aus (72) entsteht (55).

Damit ist die Lösung des Problems in elliptischen Koordinaten in Einklang gebracht mit der direkten Lösung eines Spezialfalles in cartesischen Koordinaten.

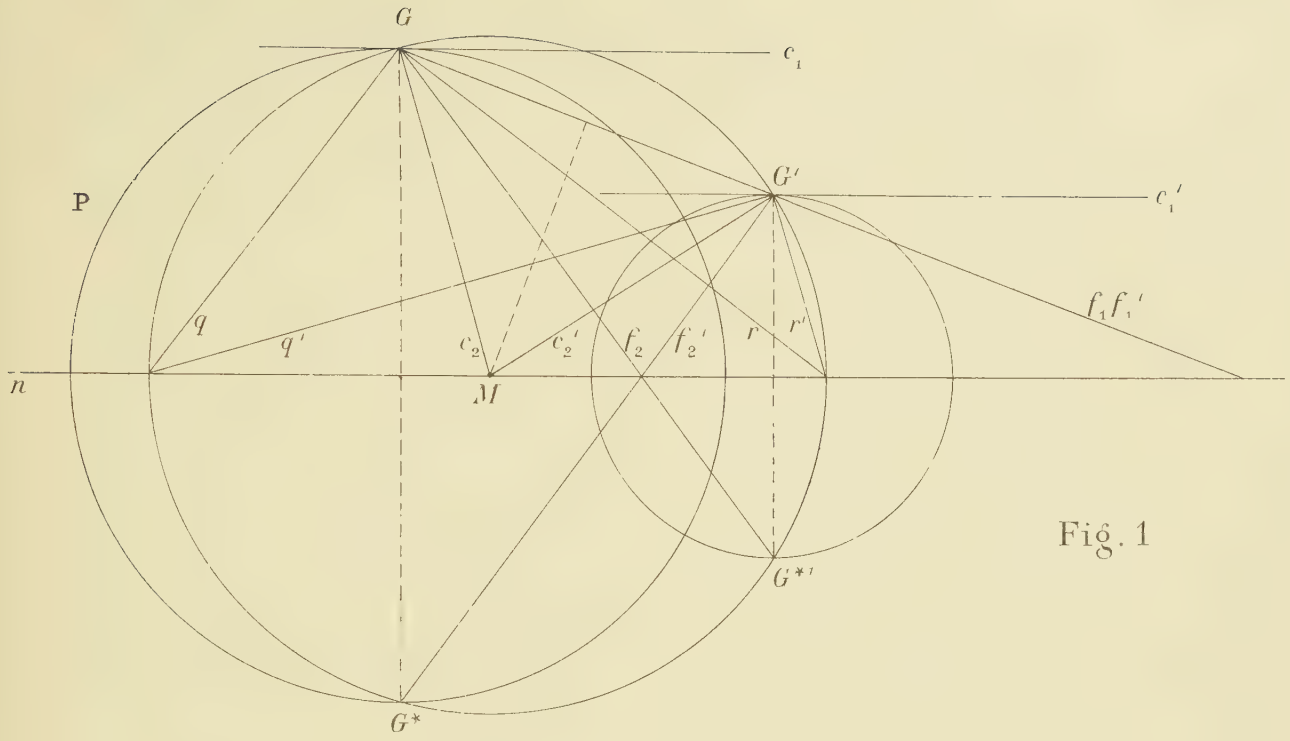
G
c_1
G'
c_1'
P
q
q'
c_2
c_2'
f_2
f_2'
r
r'
$f_1 f_1'$
n
M
$G^{*'}$
G^*

Fig. 1

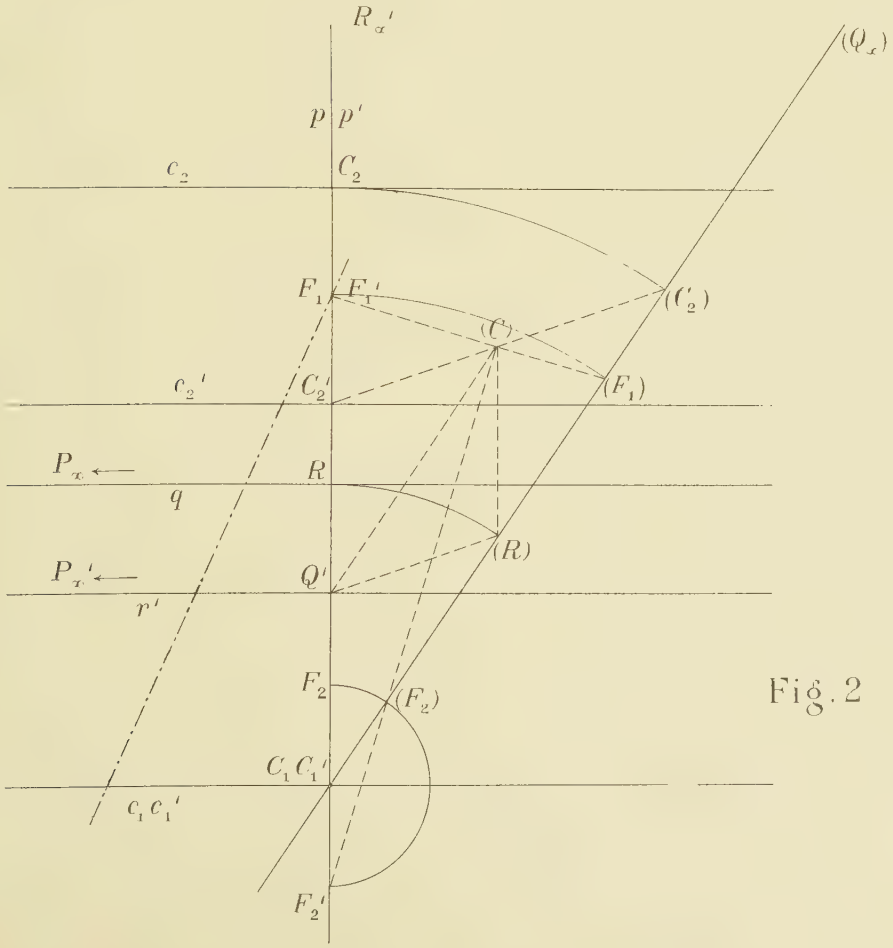
R_x'
(Q_x)
p p'
c_2
C_2
F_1 F_1'
(C_2)
(C)
c_2'
C_2'
(F_1)
P_x
R
q
(R)
P_x'
Q'
r'
F_2
(F_2)
C_1 C_1'
c_1 c_1'
F_2'

Fig. 2

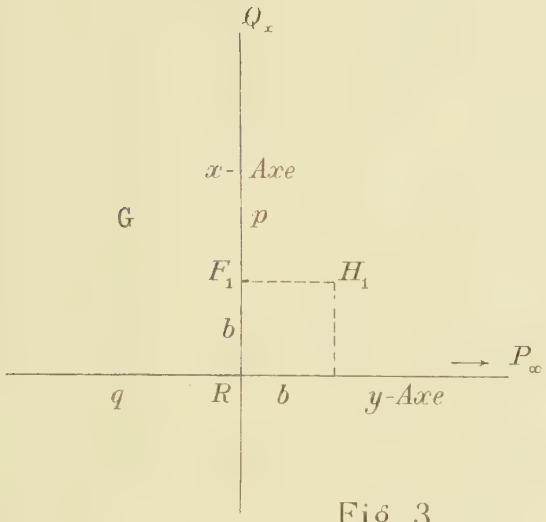

Fig. 3

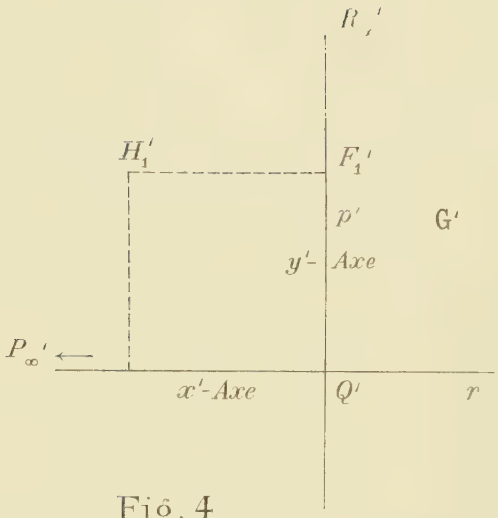

Fig. 4

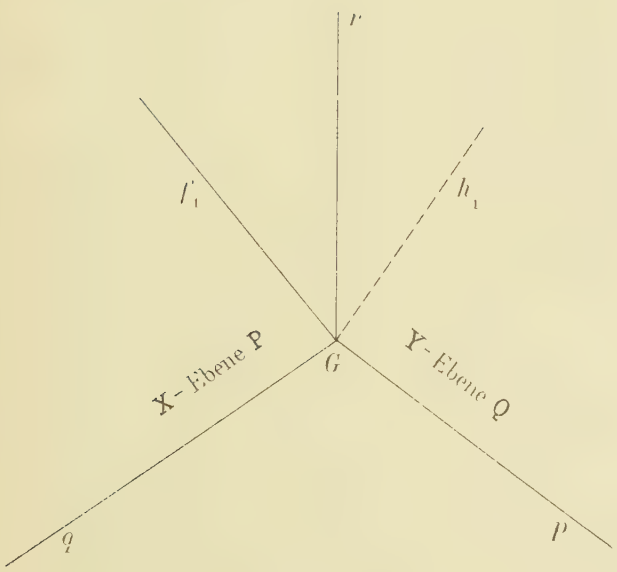

Fig. 5

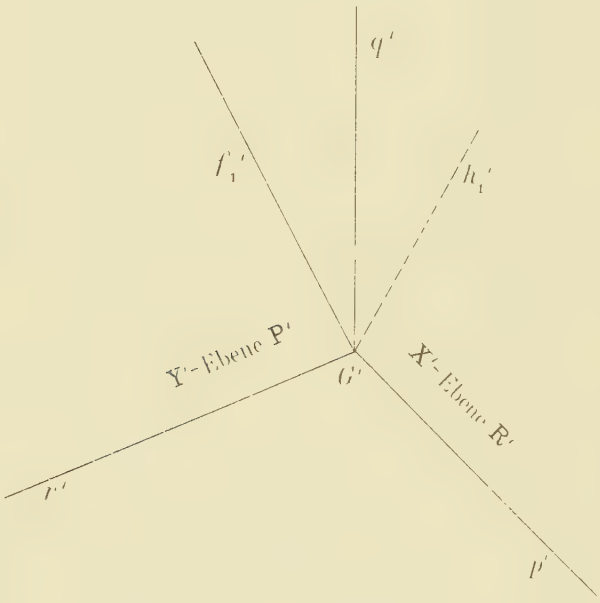

Fig. 6

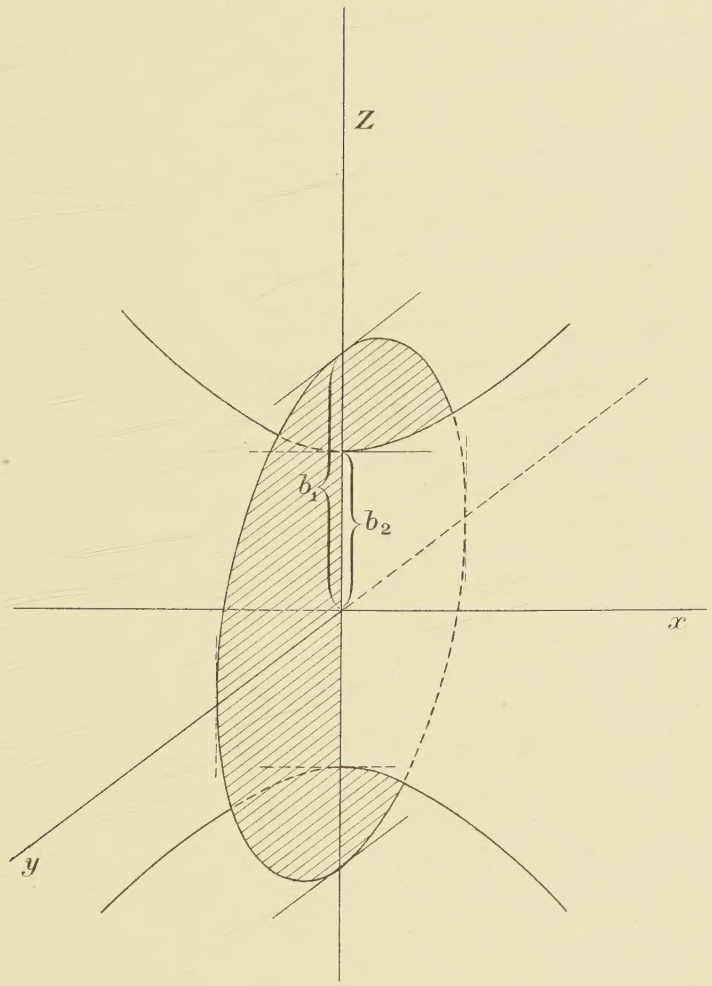

Fig. 7